Departamento de Matemáticas

Cálculo para la Edificación (UEX500975)

2024-2025 – Estudio Pagoda (segunda tarea optativa)

(Un esquema de resolución)

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

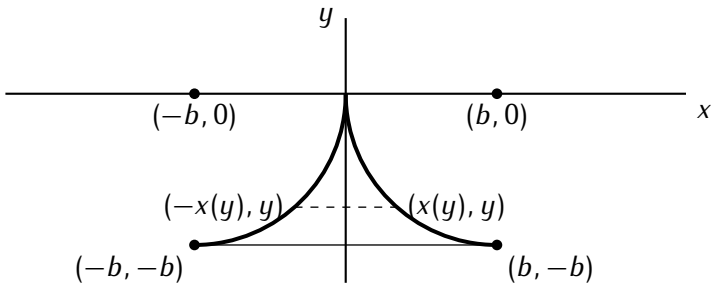
♦ Estudiemos el apartado 6.2.1 «Determinar el volumen de un sólido integrando una sección transversal (método de las rebanadas)» del libro Cálculo. Volumen I (OpenStax —Rice University—) (`https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-1/pages/6-2-determinar-los-volumenes-mediante-el-corte`), sobre cómo calcular el volumen de un sólido (no necesariamente de revolución) con secciones paralelas de área conocida (láminas/rebanadas) (o bien $V=\int_{x_0}^{x_1} A(x)dx$ [por planos verticales, esto es, perpendiculares a OX], o bien, $V=\int_{y_0}^{y_1} A(y)dy$ [por planos horizontales, esto es, perpendiculares a OY]).

▶ Calculemos el volumen de la cúpula de una pagoda de planta cuadrada y cuyas cuatro limatesas son cuadrantes de circunferencias del mismo radio b.

`Observaciones: ▪ Somos libres de añadir lo que consideremos oportuno. ▪ El documento que entreguemos debe estar por completo escrito a mano, con letra clara, siendo su entrega en mano. ▪ Puntuación máxima: 0,75 puntos sobre la calificación final de la asignatura. ▪ La puntuación obtenida se sumará a la conseguida en la primera tarea optativa. ▪ Las puntuaciones logradas en ambas tareas se conservan para las convocatorias extraordinarias del mismo curso académico. ▪ Fecha de propuesta: miércoles 30 de noviembre de 2024. ▪ Fecha límite de entrega de ambas tareas: jueves 19 de diciembre a las 11:30, en el aula A1 (si hay examen parcial ese día, junto a la entrega de éste o justo a su finalización).`

Esquema de resolución.—

Un corte de la cúpula por un plano paralelo a la planta (una sección horizontal de la cúpula) es un cuadrado cuya área, digamos, $A(y)$, depende de la altura y; consideremos un plano, perpendicular a la planta de la cúpula, que contenga dos limatesas opuestas, y en dicho plano, un sistema de referencia consistente en unos ejes cartesianos cuyo eje de ordenadas pase por el punto que las une y cuyo eje de abcisas pase por los centros de las circunferencias de las que dichas limatesas opuestas son cuadrantes; en dicho plano y respecto de dicho sistema de referencia, tales centros tienen por coordenadas $(-b,0)$ y $(b,0)$, mientras que los puntos de contacto entre tales limatesas y la planta tienen de coordenadas $(-b,-b)$ y $(b,-b)$;



sean $(-x(y),y)$ y $(x(y),y)$ los puntos de contacto de la sección horizontal de la cúpula, de área $A(y)$, a la altura y; como estos puntos de contacto son dos vértices opuestos de la sección cuadrada, la diagonal de dicho cuadrado es $|(-x(y))-x(y)|=2x(y)$; observemos que $2x(y)\leq|(-b)-b|=2b$, o sea, $x(y)\leq b$; la ecuación de la circunferencia de centro $(b,0)$ y radio b es $(x-b)^2+(y-0)^2=b^2$, esto es, $x^2-2bx+y^2=0$, con soluciones $x(y)=b\pm\sqrt{b^2-y^2}$, que como $x(y)\leq b$, la única solución válida para una altura positiva (hecho equivalente en nuestra representación a que sea $|y|<|-b|$) es $x(y)=b-\sqrt{b^2-y^2}$, por lo que la diagonal es $2\left(b-\sqrt{b^2-y^2}\right)$; por el teorema de Pitágoras, el área de un cuadrado es la mitad del cuadrado de su diagonal, de donde el área de la sección horizontal a la altura y es $A(y)=2\left(b-\sqrt{b^2-y^2}\right)^2$; por lo tanto, el volumen de la cúpula es $\int_{-b}^{0}2\left(b-\sqrt{b^2-y^2}\right)^2dy=2\int_{-b}^{0}\left(2b^2-2b\sqrt{b^2-y^2}-y^2\right)dy=4\int_{-b}^{0}b^2dy-4\int_{-b}^{0}b\sqrt{b^2-y^2}dy-2\int_{-b}^{0}y^2dy=4b^3-4\int_{-b}^{0}b\sqrt{b^2-y^2}dy-\frac{2}{3}b^3\boxed{=}$

$$\int_{-b}^{0}b\sqrt{b^2-y^2}dy=b\int_{-b}^{0}\sqrt{b^2-y^2}dy\overset{\substack{y=b\operatorname{sen}t\\ dy=b\cos t\,dt\\ =\\ t=\operatorname{arc\,sen}(y/b)\\ -\pi/2=\operatorname{arc\,sen}(-b/b)\\ 0=\operatorname{arc\,sen}(0/b)}}{}b\int_{-\pi/2}^{0}b^2\cos^2t\,dt=b^3\int_{-\pi/2}^{0}\cos^2t\,dt\overset{\cos(2t)=2\cos^2(t)-1}{=}$$

$$b^3\int_{-\pi/2}^{0}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt=\frac{b^3}{2}\left(\int_{-\pi/2}^{0}1\,dt+\int_{-\pi/2}^{0}\cos(2t)\,dt\right)=\frac{b^3}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\frac{\pi}{4}b^3$$

©2025, Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30) <http://gratuidadcristiana.blogspot.com/>.

$$\boxed{=} 4b^3 - 4\frac{\pi}{4}b^3 - \frac{2}{3}b^3 = \left(\frac{10}{3} - \pi\right) b^3.$$

Solución.— El volumen de la cúpula de la pagoda es de $\left(\frac{10}{3} - \pi\right) b^3$ unidades de volumen.

Para saber más

Fuertes García, Jesús y Martínez Hernando, Jesús, *Problemas de Cálculo Infinitesimal*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1997, ISBN: 84-481-1119-2.

Nota.— La cuestión aquí estudiada es el ejercicio 11.48 (pp. 266-267) de dicho libro. Éste pertenece a la serie Schaum, siendo muy recomendable su estudio para el aprendizaje de la práctica del cálculo diferencial e integral de una variable.

©2025, Juan Miguel León Rojas; metaLicencia † Gratuidad Cristiana (CGL 10.30) <http://gratuidadcristiana.blogspot.com/>.